Electromagnetic
الكهرومغناطيسية
الصف الرابع
مدرس المادة : د. سعدي التميري

المصادر
1- اساسيات النظرية الكهرومغناطيسية
تأليف ريتز - ميلفورد
2- Electromagnetic - nd
Kraus and carver.

Chapter (1) / Vector analysis

* **Unit vector**: A vector length 1 is called a unit vector thus $i(1,0)$, $j(0,1)$ in 2-space and $i(1,0,0)$, $j(0,1,0)$, $K(0,0,1)$ in 3-space.

* A commen problem in application is find a unit vector (u) that has the same direction given non zero vector (V), this can be done by multiplying (V) by the reciprocal of its length that is $u = \frac{\vec{V}}{|V|}$

لايجاد متجه الوحده من حاصل ضرب متجه الوحده في مقلوب متجه الطول .

Ex/ Find the unit vector that has the same direction as $\vec{V} = 2i + 2j - K$.

sol/ The vector $\vec{V}$ has length $|V| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$

$$\therefore u = \frac{\vec{V}}{|V|} = \frac{2i + 2j - K}{3} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}K$$

* process multiplication
- The scalar product
- Theorem: If (u) and (V) non zero vectors in 2-space or 3-space and if θ the angle between them

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad \text{or} \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = |u||v| \cos\theta.$$

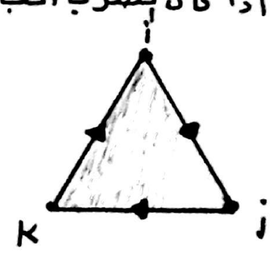
* Remark (1)
- we have $\begin{bmatrix} i \cdot i = j \cdot j = K \cdot K = 1 \\ i \cdot j = j \cdot K = K \cdot i = 0 \end{bmatrix}$

* اذا كان الضرب عددي

* اذا كان الضرب اتجاهي

* Remark (2)

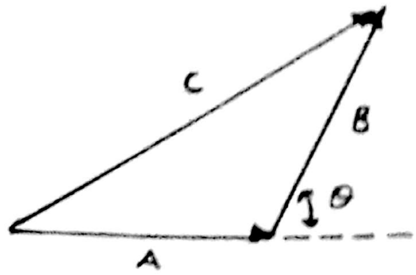
$$\begin{bmatrix} i \times i = j \times j = K \times K = 0 \\ i \times j = K, \; j \times K = i, \; K \times i = j \\ i \times K = -j, \; K \times j = -i, \; j \times i = -K \end{bmatrix}$$



* Remark (3)

- Law of cosines

- consider the triangle whose sides are A, B and C, as shown in Figure, then $C = A + B$. Take the dot product of C with itself



$$C \cdot C = (A + B) \cdot (A + B)$$
$$= A \cdot A + 2 A \cdot B + B \cdot B$$

Replace $A \cdot B = AB \cos\theta$ to obtain

$$C^2 = A^2 + 2AB \cos\theta + B^2$$

which is the familar law of cosines.

Ex/ The vector $ai + j - K$ is perpendicular to the vector $i + 2j - 3K$. what is the value of a ?

Sol/ If the vectors are perpendicular to each other, their dot product must vanish ($\cos 90 = 0$)

$$(ai + j - K) \cdot (i + 2j - 3K) = a + 2 + 3 = 0$$
$$= a + 5 = 0$$

Therefore, $a = -5$.

---

* The vector product

- Theorem : Let u and V non zero vectors in 2-space or 3-space and let (θ) be the angle between them

$$u \times V = |u||V| \sin\theta$$

Ex/ Given the two vectors $A = 2i + j - K$, $B = i - j + 2K$, Find $A \times B$

Sol/ In this case it is convenient to use the determinant form

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i(2-1) - j(4-(-1)) + K(-2-1)$$
$$= i - 5j - 3K.$$

Scanned by CamScanner

Ex/ Find a unit vector normal to the plane containing the two vectors $A = 2i + j - K$, $B = i - j + 2K$

Sol/

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i(2-1) - j\left(4-(-1)\right) + K(-2-1)$$
$$= i - 5j - 3K$$

$$n = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{i - 5j - 3K}{[1^2 + 5^2 + 3^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{\sqrt{35}} - \frac{5j}{\sqrt{35}} - \frac{3K}{\sqrt{35}}.$$

---

* Triple product

- The expression $A \cdot (B \times C)$ is called the scalar triple product of A, B and C. it is a scalar because it is the dot product of two vectors. Referring to the determinant expressions for the cross product, the scalar triple product may be written.

$$A \cdot (B \times c) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

- The expression $A \times (B \times c)$ is called the vector triple product may be written

$$A \times (B \times c) = B(A \cdot c) - c(A \cdot B)$$

Ex/ Given the three vectors $A = i$, $B = i - j$ and $c = K$, find ① $A \cdot (B \times C)$
② $A \times (B \times C)$

Sol/ ① $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+0) = -1$

② $A \times (B \times C) = B(A \cdot c) - c(A \cdot B)$
$= (i - j)(0) - K(1 - 0)$
$= -K.$

$A \cdot C$
$i \cdot K = 0$
$A \cdot B$
$= i \cdot (i - j)$ $\quad i \cdot j = 0$
$= 1 \cdot 0$

* Gradient Field : If ϕ is a function of three variable, then gradient of ϕ is defined as.

$$\nabla\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x} i + \frac{\delta\phi}{\delta y} j + \frac{\delta\phi}{\delta z} K.$$

* Divergence and Curl. الالتفاف والتباعد

- If $f(x,y,z) = f(x,y,z) i + g(x,y,z) j + h(x,y,z) K$

then divergence f , $\nabla \cdot f$ give by

$$\nabla \cdot f = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta h}{\delta z}.$$

and curl f give by

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

---

* The ∇ operator

This operator give by $\nabla = \frac{\delta}{\delta x} i + \frac{\delta}{\delta y} j + \frac{\delta}{\delta z} K.$

which when applied to ϕ

$$\nabla\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x} i + \frac{\delta\phi}{\delta y} j + \frac{\delta\phi}{\delta z} K$$

* Laplacian operator ∇^2

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}.$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\delta^2\phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\phi}{\delta z^2}.$$

- The equation $\nabla^2\phi = 0$ is Known Laplace eq^n.

Scanned by CamScanner

* **Divergence theorem :** نظرية التباعد

The integral of the divergence of a vector over a volume (V) is equal to the surface of the vector over the surface integral bounding (V). that is :

$$\int_V \text{div } F \, dV = \oint_s F \cdot n \, da \quad \text{........ (1)}$$

- ان تكامل تباعد متجه خلال حجم (V) يساوي التكامل السطحي للمركبه العموديه للمتجه الذي يحتضن ذلك الحجم .

* **stokes theorem :** نظرية ستوكس

The line integral of a vector around aclosed curve is equal to the Integral of the normal component of Its curve over any surface bounded by the curve. that is

$$\oint_c F \cdot dl = \int_s \text{curl } F \cdot n \, da \quad \text{...... (2)}$$

- ان التكامل الخطي لمتجه حول مسار مغلق يساوي تكامل المركبه العموديه لالتفاف المتجه على اي سطح محاط بالمسار.

Ex/ what is the unit normal to the surface $z^2 = x^2 + y^2$ at the point $(1, -2, 2)$

Sol/ let $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

$$\nabla \phi = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2-z^2)\, i + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-z^2)\, j + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2-z^2)\, K$$

$$\nabla \phi = 2x i + 2y j - 2z K \Big|_{(1,-2,2)}$$

$$\nabla \phi = 2i - 4j - 4K$$

$$|\nabla \phi| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\therefore u = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{2i - 4j - 4K}{6} = \frac{1}{3} i - \frac{2}{3} j - \frac{2}{3} K.$$

Scanned by CamScanner

Ex/ Use the divergence theorem to find the outward flux of the vector field $F(x,y,z) = 2xi + 3yj + z^2 K$ across the unit cube bounded by

$x = 0 \quad , \quad x = 1$
$y = 0 \quad , \quad y = 1$
$z = 0 \quad , \quad z = 1$

Sol/ The divergence of the vector field is

$$\text{div } F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2 + 3 + 2z$$
$$= 5 + 2z$$

$$\phi = \oint_s F \cdot n\,da = \int_v \text{div } F \cdot dv$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \text{div } F\, dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (5+2z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^1 5z + z^2 \Big|_0^1 dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 6\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 6x \Big|_0^1 dy = \int_0^1 6\, dy$$

$$= 6y \Big|_0^1$$

$$= \underline{\underline{6}}$$

Ex/ Determine a unit vector perpendicular to plane of

$\vec{A} = 2i - 6j - 3K$

$\vec{B} = 4i + 3j - K$

Sol/
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i(6+9) - j(-2+12) + K(6+24)$$
$$= 15i - 10j + 30K$$

$$\therefore u = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|A \times B|} = \frac{15i - 10j + 30K}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{15i - 10j + 30K}{\sqrt{1225} = 35} = \frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}K$$

Scanned by CamScanner

مسألة محلولة

Ex1// The vectors from the origin to point A, B, C, D are
$\vec{A} = i + j + K$, $\vec{B} = 2i + 3j$, $\vec{C} = 3i + 5j - 2K$, $D = K - j$
show that the line $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ are parallel , and find the ratio of their length.

اذا كانت المتجهات تشترك للنقاط (A, B, C, D) ، اثبت ان المستقيمين $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ متوازيين ثم اوجد النسبة بينهما.

Sol//
$$\overline{AB} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$\overline{AB} = (i + j + K) - (2i + 3j) = \underline{-i - 2j + K}$$
$$\overline{CD} = \vec{C} - \vec{D}$$
$$\overline{CD} = (3i + 5j - 2K) - (K - j) = \underline{3i + 6j - 3K}$$

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = i(6-6) - j(3-3) + K(-6+6) = 0$$

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = |AB||CD| \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{|AB||CD|}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\,\sqrt{3^2+6^2+3^2}} = \frac{0}{\sqrt{6}\,\sqrt{54}} = 0$$

$\therefore \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \sin^{-1} 0 = 0 \Rightarrow$ The line is parallel

The ratio of their length $= \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

Ex2// show that the following vectors are perpendicular
$\vec{A} = i + 4j + 3K$, $\vec{B} = 4i + 2j - 4K$.

Sol// $\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B| \cos\theta \quad \ldots (1)$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (i + 4j + 3K) \cdot (4i + 2j - 4K) = 4 + 8 - 12 = 0$$
$$|A| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$
$$|B| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

From eq^n (1) $\quad \cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A||B|} = \dfrac{0}{\sqrt{26} \times 6} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\therefore \theta = \cos^{-1} 0 = 90^\circ$

$\therefore$ The vectors is perpendicular.

Ex3 / If (A) is a constant vector and $(\vec{r})$ is the vector from the origin to the point (x, y, z) show that $(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{A}=0$ is equation of a plane.

Sol /

متجه الموضع $\vec{r}$ يمكن كتابته بالشكل التالي

$$\vec{r} = xi + yj + zK$$

والمتجه A بدلالة مركباته بالشكل التالي

$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z K$$

$$\therefore (\vec{r}-\vec{A})\cdot A = (xi+yj+zK)-(A_x i + A_y j + A_z K)\cdot(A_x i + A_y j + A_z K) = 0$$

$$(x-A_x)A_x + (y-A_y)A_y + (z-A_z)A_z = 0$$

$$A_x x + A_y y + A_z z - (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) = 0$$ هذه المعادله / معادله مستوي

Ex 4 / If the vector field $A = 5x^2(\sin\frac{\pi}{2}x)i$, find $(\operatorname{div} A)$ when $x=1$

Sol / $\operatorname{div} A = \frac{d}{dx}(A) = \frac{d}{dx}\left[5x^2(\sin\frac{\pi}{2}x)\right]$

$$= 5x^2\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right) * \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}x * 10x$$

$$= \frac{5\pi}{2}x^2\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\frac{\pi}{2}x * 10x \Big|_{x=1}$$

$$= \frac{5\pi}{2} * 1^2 (\underbrace{\cos 90}_{=0} * 1) + \underbrace{\sin 90}_{=1} * 1 * 10 * 1$$

$$= \frac{5\pi}{2} * 0 + 1 * 10 = 10$$

Ex5 / If $(\vec{A})$ a vector prove that grad $(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \vec{A}$

Sol / we have $\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z K$

$$\vec{r} = xi + yj + zK$$

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{r} = (A_x i + A_y j + A_z k)\cdot(xi + yj + zk) = xA_x + yA_y + zA_z$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)(xA_x + yA_y + zA_z)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x}A_x i + \frac{\partial y}{\partial y}A_y j + \frac{\partial z}{\partial z}A_z K = A_x i + A_y j + A_z k = \vec{A}$$

Scanned by CamScanner

Ex 6 / If $\vec{A}$ is a constant vector and $\vec{r}$ is a vector from the origin to the point (x, y, z) show that $(\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{r}=0$ is that equation of sphere.

sol / we have

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$
$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k .$$

$$\therefore (\vec{r}-\vec{A})\cdot\vec{r} = 0$$

$$\left[(xi + yj + zk) - (A_x i + A_y j + A_z k)\right]\cdot(xi + yj + zk) = 0$$

$$(x - A_x)x + (y - A_y)y + (z - A_z)z = 0$$

$$x^2 - A_x x + y^2 - A_y y + z^2 - A_z z = 0$$ هذه المعادله يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$\left(x - \frac{A_x}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{A_y}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{A_z}{2}\right)^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{4}$$

معادله كره

---

* ملاحظه : المعادله الاخيره على صيغتها عند فتحها يظهر المقدار

$$\frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{4} \qquad (*)$$

ولكي ترجع المعادله الى المعادله التي قبلها مساويه الى الصفر يجب ان تساوي المعادله الاخيره المقدار (*) في الطرف الأيمن .

Electrostatic

د. سعدي التقيري

– coulomb forces and electric intensity.

* Coulomb's law: The force (f) between two point charges (Q_1) and (Q_2) is proportional to the product of the charges and inversely proportional to the square of the distance (r) between them, i.e

$$F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (N) \text{ ——— } (1)$$

where K is a constant of proportionality.

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

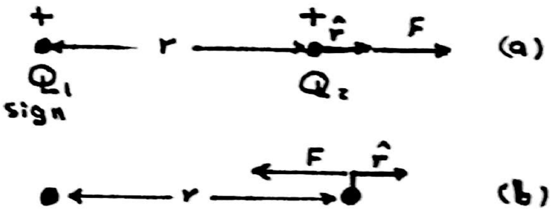


Fig
(a) Two point charges of same sign and (b) opposite sign.

* $\epsilon_0 = 8.85 * 10^{-12}\ Fm^{-1} = 8.85\ pF m^{-1}$

$$\approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ Fm^{-1} = \frac{1}{36\pi}\ nF m^{-1}.$$

- Force is a vector; i.e. it has both magnitud and direction Rewriting (1) as a vector equation and substituting the value of K, we have

$$\boxed{F = \hat{r} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \text{ ——— } (2)$$

where F = force, (N)

$\hat{r}$ = unit vector pointing in direction of line joining the charges متجه وحدة باتجاه الخط الواصل بين الشحنتين

Q_1 = charge 1, (C)

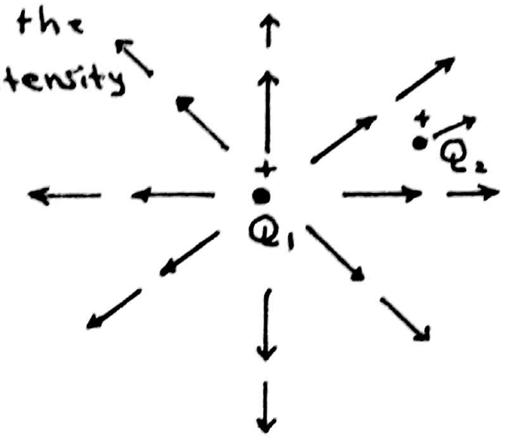
Q_2 = charge 2, (C)

ϵ_0 = permittivity of medium, (Fm^{-1})

r = distance between point charges, (m)

Scanned by CamScanner

* **Electric field intensity** : If Q_2 is a positive test charge, the resulting force per unit charge is defined as the electric field intensity E, Thus



$$\boxed{E = \frac{F}{Q_2} = \hat{r}\,\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad \text{———— (3)}$$

where Q_2 = positive test charge.

* **charge distributions** توزيعات الشحنة

– Volume charge density : defined by الكثافة الحجمية للشحنة

$$\boxed{\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho\, dV} \quad \text{———— (4)}$$

– surface charge density : defined by كثافة الشحنة السطحية

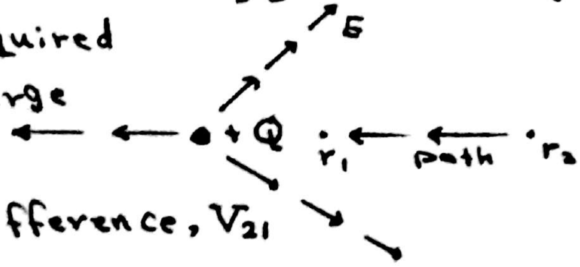
$$\boxed{\rho_s = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow dQ = \rho_s\, ds} \quad \longrightarrow (5)$$

– Line charg density : defined by كثافة الشحنة الخطية .

$$\boxed{\rho_L = \frac{dQ}{dL} \Rightarrow dQ = \rho_L\, dL} \quad \text{———— (6)}$$

* **The electrostatic potential** : الجهد الالكتروستاتيكي .

The energy per co lomb required to move a positive test charge from r_2 to r_1 along a radial path equals the potenial difference, V_{21}



Scanned by CamScanner

between the point , this is given by

$$V_{21} = \int_{r_2}^{r_1} dV = - \int_{r_2}^{r_1} E\, dr$$

* يعرف الجهد الكهربائي عند نقطة ما :
الشغل اللازم بذله ضد القوى الكهربائية للمجال لنقل وحدة الشحنات الموجبة من (∞) حتى هذه النقطة .

The negative sign takes into acount that fact that the motion from $r_2 \rightarrow r_1$ is opposite to the direction of the field.

substituting the value of E , we get

$$V_{21} = V_1 - V_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}\, dr .$$

$$V_{21} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{———} (7)$$

where V_1 = potential at point r_1.
V_2 = potential at point r_2.

- If the point r_2 is removed to infinity , we can arbitrarily defined it to be at zero potential , thus the (7) becomes

$$V_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1} \quad (V) \text{ ——————— } (8)$$

- This potential is called the absolute potential of the point r_1 due to the charge Q .

* Mapping of an electric field with line of force

- positive point charge

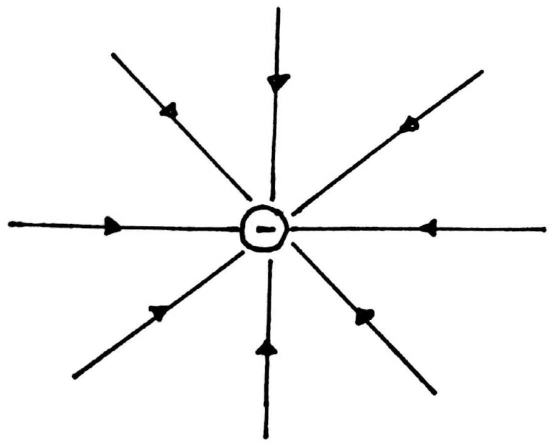
- شحنه نقطيه موجبه

- تكون خطوط القوه المعبره عن هذا المجال شعاعيه منبثقه من الشحنه بجميع الاتجاهات نحو الخارج

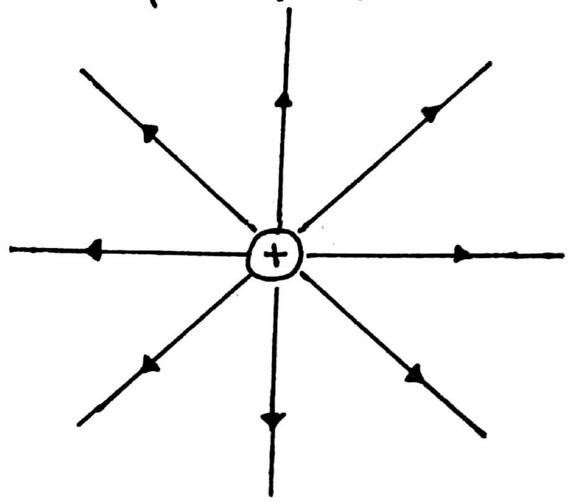
- negative point charge

- شحنه نقطيه سالبه

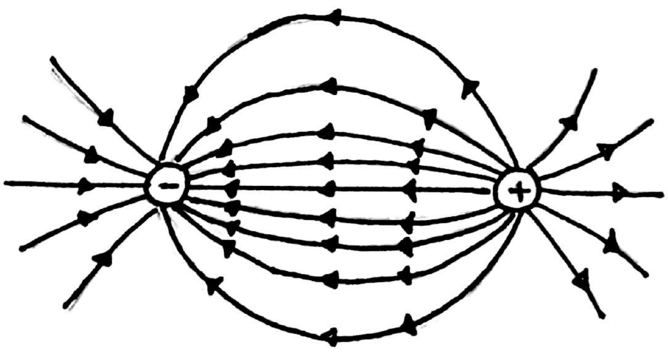
- تكون خطوط القوه للمجال الناشئ عند الشحنه نقطيه منفرده سالبه، شعاعيه كذلك ولكنها متجه نحو الشحنه



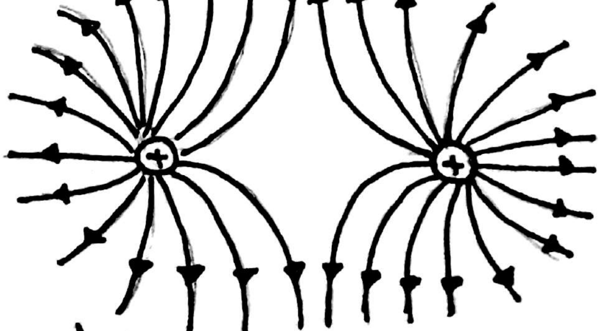
negative point charge



positive point charge



Electric dipole consisting of a positive and negative charge



Electric field around two equal positive charge

Scanned by CamScanner

* Electric potential of charge distributions and the principle of superpostion of potential.
مبدأ التراكب

- The total electric potential at a point is the algebraic sum of the individual component at the point.
المركبات المفردة

- Thus, if only the three point charges Q_1, Q_2 and Q_3 are present in Fig, the total electric potential (work per unit charg) at the point (P) is given by.

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3}\right) \qquad (1)$$

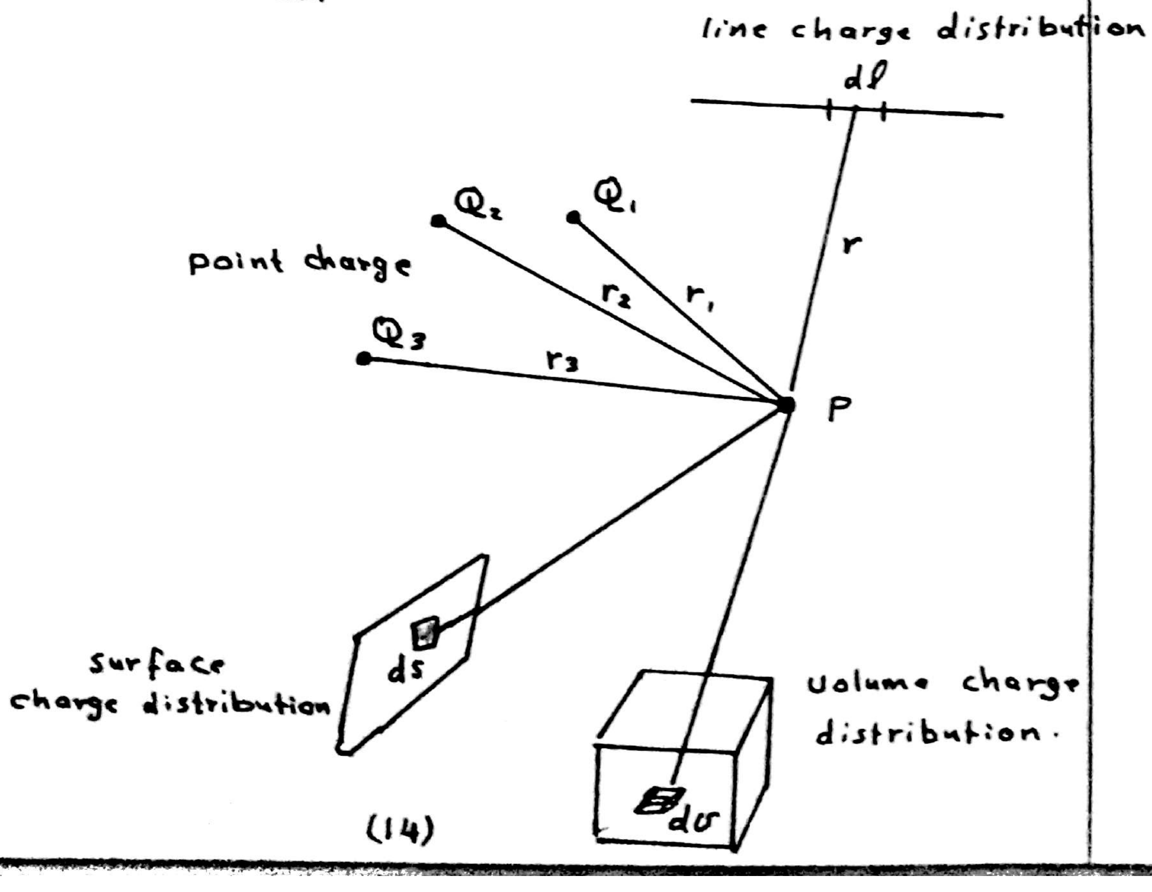
where r_1 = distance from Q_1 to P.

r_2 = distance from Q_2 to P.

r_3 = distance from Q_3 to P.

This can also be expressed with a summation sign. علامة جمع
Thus رمزيا

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{3}\frac{Q_n}{r_n} \qquad (2)$$



Scanned by CamScanner

- If the charge is distributed along a line as in Fig
The potential at (P) due to this linear charge distribution is

$$\bar{V}_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\rho_L}{r} \, dl \quad \text{———} \quad (3)$$

where ρ_L = linear charge density, Cm^{-1}.

dl = element of length of line, m.

- when the charge is distributed over a surface, as in Fig
The potential at (P) caused by this surface charge distribution is

$$V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iint \frac{\rho_s}{r} \, ds \quad \text{———} \quad (4)$$

where ρ_s = surface charge density, Cm^{-2}.

ds = element of surface, m^2.

- For a volume charge distribution. in Fig

$$V_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \iiint \frac{\rho}{r} \, dv \quad \text{———} \quad (5)$$

where ρ = (volume) charge density, Cm^{-3}.

dv = element of volume, m^3.

- The total electric potential at the point (P) due all of these distribution is by the superpostion principle. the
التراكب مبدأ
algebraic sum of the individual component potential, Thus
مركبات الجهد المنفرد

$$V = V_p + V_L + V_s + V_v$$

or

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{Q_n}{r_n} + \int \frac{\rho_L}{r} \, dl + \iint \frac{\rho_s}{r} \, ds + \iiint \frac{\rho}{r} \, dv \right)$$

.... (6)

$Q_1 \cdot Q_1 \cdot Q_1 \cdot \cdot \cdot Q_N$

Scanned by CamScanner

we may also write (6) as

$$\boxed{V = \sum_{1}^{N} Q_n G_n + \int \rho_L G\, dl + \iint \rho_s G\, ds + \iiint \rho G\, dv} \quad \text{---(7)}$$

where $G = 1/4\pi\epsilon_0 r$ دالة كرين الكتروستاتيكية

G is the electrostatic Green's function and is equal to the potential for a 1-C point charge. تساوي الجهد لشحنه نقطيه مقدارها كولوم واحد.

---

* **Gauss' law** : An important relationship between the integral of the normal component of the electric field over aclosed surface and the total charge inclosed by the surface

- علاقة مهمة بين تكامل المركبة العمودية للمجال الكهربائي على سطح مغلق والشحنة الكلية التي يحتضنها السطح .

$$\oint_s E \cdot n\, da = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{------ (1)}$$

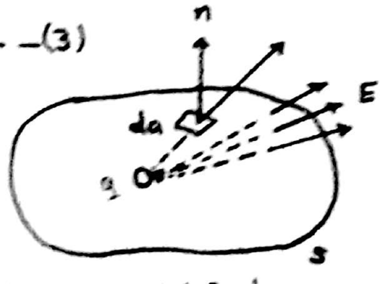
- ان المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة نقطية (q) واقعة في نقطة الاصل عند نقطة محددة بالمتجه r يساوي

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{---- (2)} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

- لنأخذ التكامل السطحي للمركبة العمودية لهذا المجال على سطح مغلق (كالسطح المبين بالشكل) الذي يحيط بالشحنة (q) سنحصل على .

$$\oint_s E \cdot n\, da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\vec{r} \cdot n}{r^3}\, da \quad \text{---(3)}$$

where da : المساحة التفاضلية للسطح



الشكل / سطح تخيلي مغلق يحتضن شحنة نقطية واقعة في نقطة الأصل .

Scanned by CamScanner

- الكميه $(\frac{\vec{r}}{r})\cdot n\,da$ تمثل مسقط عنصر المساحه التفاضليه على سطح الكره التي نصف قطرها (r) ومركزها (o)

- وبتقسيم مساحة المسقط على الكميه (r^2) نحصل على الزاويه الجسمه ($d\Omega$) التي تكونها المساحه (da) اي

$$d\Omega = \frac{\text{مسقط المساحه}}{r^2} = \frac{(\frac{\vec{r}}{r})\cdot n\,da}{r^2} = 4\pi.$$

∴ العلاقه (3) تصبح

$$\oint_s E\cdot n\,da = \frac{q}{\cancel{4\pi}\epsilon_0}\cdot\cancel{4\pi}$$

hint $\iint d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi$
$= [-\cos\theta]_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = 2\times 2\pi = 4\pi.$

$$\boxed{\therefore \oint_s E\cdot n\,da = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad \text{———} (4)$$

- اذا كان السطح المغلق (S) محتضناً عدداً من الشحنات النقطيه هي $q_1, q_2, \ldots q_N$ عندئذٍ تصبح المعادله (4)

$$\oint_s E\cdot n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \quad \text{———} (5)$$

- اذا فرضنا ان (S) تمثل السطح المغلق الذي يحيط بحجم التوزيع الشحني (V) لنتج لدينا

$$\oint_s E\cdot n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV \quad \text{———} (6)$$

$$q = \int_v \rho\, dV$$

- وباستخدام نظرية التباعد يمكن التعبير عن قانون كاوس بصيغه اخرى. تنص نظرية التباعد

$$\oint_s F\cdot n\,da = \int_V \text{div}\, F\, dV.$$

- وعند تطبيق هذه النظريه على التكامل السطحي للمركبه العموديه للمجال الكهربائي فانها تؤول الى الشكل التالي

$$\oint_s E\cdot n\,da = \int_V \text{div}\, E\, dV \quad \text{———} (7)$$

- بمساواة المعادله (6 ، 7) نحصل

$$\int_V \text{div}\, E\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, dV \quad \text{———} (8)$$

والمعادله (8) صحيحه لجميع الحجوم وبأي شكل كان الحجم (V) للشحنه ، وبناءاً على ذلك فانصحة هذه العلاقه ولأي حجم يختار للشحنه سيتضمن العلاقه

$$\boxed{\text{div}\, E = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{———} (9)$$

Scanned by CamScanner

- ويمكننا ان نعد هذه النتيجه بمثابة صيغه تفاضليه لقانون كاوس .

اسئله محلوله

Ex 1 / Two point charge $q_1 = 50\mu C$, $q_2 = 10\mu C$ located in $(-1,1,-3)$, $(3,1,0)$ respectiuly , find the force on charge q_1 .

sol / $$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \cdot a_{21} \quad , \quad a_{21} = \frac{\vec{R}_{21}}{|R_{21}|}$$

$$\vec{R} = xi + yj + zk .$$

$$R_{21} = (-1-3)i + (1-1)j + (-3-0)k$$

$$R_{21} = -4i - 3k .$$

$$\therefore a_{21} = \frac{\vec{R}_{21}}{|R_{21}|} = \frac{-4i-3k}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{-4i-3k}{5} = -0.8i - 0.6k$$

$$F_1 = \frac{(50*10^{-6})(10*10^{-6})}{4\pi * 8.85*10^{-12} * 5^2} \cdot (-0.8i - 0.6k)$$

$F_1 = 0.18\,N$ for direction $(-0.8i - 0.6k)$.

Ex 2 / Find the electric field in $(0,3,4)$ m in cartision coordinate as aresult point charge $q = 0.5\mu C$ in origin point.

sol / $$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot a_R \quad , \quad a_R = \frac{\vec{R}}{|R|}$$

point (1) = $(0,3,4)$
point (2) = $(0,0,0)$

Scanned by CamScanner

$$\vec{R} = xi + yj + zK$$

$$= (0-0)i + (3-0)j + (4-0)K$$

$$= 3j + 4K$$

$$|R| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \therefore a_R = \frac{3j+4K}{5} = 0.6j + 0.8K$$

$$\therefore E = \frac{0.5 * 10^{-6}}{4\pi * 8.85 * 10^{-12} * 5^2} \cdot (0.6j + 0.8K)$$

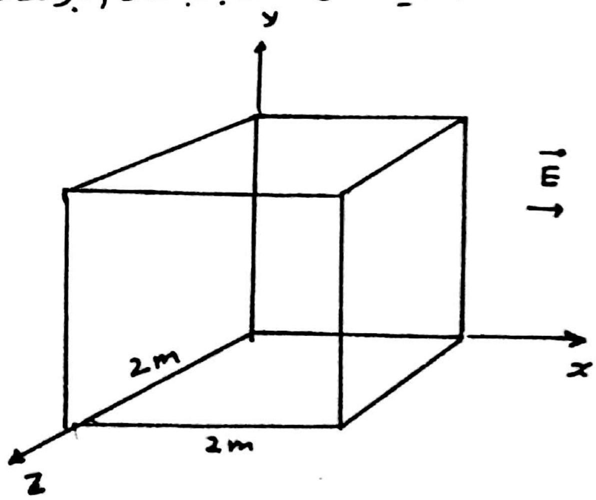
$$= 180\ V/m$$ باتجاه $(0.6j + 0.8K)$

Ex3/ Cubic with length (2 m), one angle in origin point and the parallel length for rectangular coordinates (x, y, z) and the electric field give by the relation $\vec{E} = (2ax^2)i$, which (a) constant, calculat the total charge inside the cube by using gauss's theorem or divergence theorem.

مكعب طول ضلعه ( ) احدى زواياه في نقطة الاصل واضلاعه موازيه للمحاور المتعامده (x,y,z) وان المجال معطى بالعلاقة ( ) حيث a كميه ثابته احسب الشحنه الكليه داخل المكعب باستخدام مبرهنة كاوس

Sol/ From G.L

$$\oint E \cdot n\,da = \frac{q}{\epsilon_o}$$



From divergence theorem

$$\oint_s E \cdot n\,da = \int_V \nabla \cdot E\, dV = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\delta E_x}{\delta x} = 4ax \quad , \quad dV = dx\,dy\,dz$$

$$\therefore \int_V \nabla \cdot E\, dV = \frac{q}{\epsilon_o}$$

Scanned by CamScanner

$$\int 4ax \, dx\, dy\, dz = \frac{q}{\epsilon_o}$$

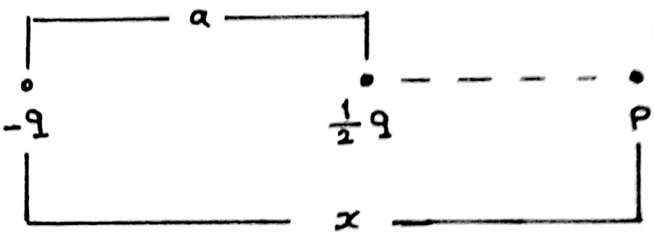
$$4a \int_0^2 x\,dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$4a \left[\frac{x^2}{2} \right|_0^2 \left[y \right|_0^2 \left[z \right|_0^2 = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$8a * 2 * 2 = \frac{q}{\epsilon_o}$$

$$\therefore \quad q = 32 a \epsilon_o \quad (c)$$

Ex 4 // Two point charge $(-q)$, $(+\frac{1}{2}q)$ are situted at the origin and the point $(a,0,0)$ respectively, at what point along the x-axis does electric field vanish.



sol // Let $E=0$ at the point (p)

$$E_1 = K \frac{q_1}{r^2} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_o x^2} \quad ---(1)$$

شحنتان نقطيتان $-q$ ، $+\frac{1}{2}q$ موضوعتان عند نقطة الاصل وعند النقطة $(a,0,0)$ على الترتيب عند اية نقطة واقعة امتداد محور x يصبح المجال الكهربائي صفر؟ .

$$E_2 = K \frac{q_2}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}q}{4\pi\epsilon_o (x-a)^2} \quad ---(2)$$

but $E_1 + E_2 = 0$

$$\frac{-q}{4\pi\epsilon_o x^2} + \frac{\frac{1}{2}q}{4\pi\epsilon_o (x-a)^2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}q}{\cancel{4\pi\epsilon_o}(x-a)^2} = \frac{q}{\cancel{4\pi\epsilon_o} x^2}$$

$$2(x-a)^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4ax + 2a^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4ax + 2a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4a \mp \sqrt{16a^2 - 8a^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a \mp 2a\sqrt{2}}{2} = (2 \mp \sqrt{2})a.$$

$$x = \frac{\cancel{2}a(2 \mp \sqrt{2})}{\cancel{2}}$$

Scanned by CamScanner

Ex 5 / A spherical charge distribution has a volume charge density that is a function only of (r) the distance from the center of by distribution in other word $\rho = \rho(r)$ if $\rho(r)$ is as given below determine the electric field as a function of (r), integral the result to obtain an expression for the electrostatic potential $U(r)$

(a) $\rho = A/r$ with A constant, $0 \leq r \leq R$
$\rho = 0$ for $r > R$.

(b) $\rho = \rho_0$ for $0 \leq r \leq R$
$\rho = 0$ for $r > R$.

توزيع شحني كروي ذو كثافه حجميه داله للبعد (r) عن مركز التوزيع اي $\rho = \rho(r)$ فاذا علمت ان دالة الكثافه هي كما معطاة في ادناه، عين المجال الكهربائي داله للبعد (r)، انجز عمليه التكامل على النتيجه التي حصلت عليها لتحصل على تعبير للجهد الكهروستاتيكي $U(r)$

أ- $\rho = A/r$ اذ ان A مقدار ثابت للبعد $0 \leq r \leq R$
$\rho = 0$ للبعد $r > R$

ب- $\rho = \rho_0$ اي ان الكثافه تساوي مقداراً ثابتاً للبعد $0 \leq r \leq R$
$\rho = 0$ للبعد $r > R$

---

sol / (a)

$$q = \int_V \rho \, dV \quad , \quad dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \, d\phi$$

$$q = \int_V \frac{A}{r} r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi = A \int_V r \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$q = A \int_0^R r \, dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = A \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \cdot \left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$q = A \left[\frac{R^2}{2} \cdot (-\cancel{1}(-1-1) \cdot 2\pi\right] \Rightarrow q = 2AR^2\pi$$

but
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2AR^2\pi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2}$$

$$U = -\int E \cdot dr = -\frac{AR^2}{2\epsilon_0} \int_r^R \frac{1}{r^2} dr = \frac{-AR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r}\right]_r^R = +\frac{AR^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\int r^{-2} dr = \frac{r^{-1}}{-1} = -\frac{1}{r}$$

Scanned by CamScanner

b/

$$q = \int_V \rho \, dV = \int \rho_0 \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr .$$

$$= \rho_0 \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi .$$

$$q = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} \right|_0^R \cdot \left(-\cos\theta\right|_0^\pi \cdot \left[\phi\right|_0^{2\pi} .$$

$$= \rho_0 \left\{ \frac{R^3}{3} \cdot (-(-1-1)) \cdot 2\pi \right\} = \frac{-4\rho_0 R^3 \pi}{3}$$

but $E = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \dfrac{-\cancel{4}\rho_0 R^3 \cancel{\pi}}{\cancel{4\pi}\epsilon_0 r^2 * 3} = \dfrac{-\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$

$$\therefore U = -\int E \cdot dr = \frac{+\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \int_r^R \frac{1}{r^2} dr = \frac{-\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right]$$

$$\frac{+\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right|_r^R = -\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right]$$

$$U = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right] .$$

Ex6 / show $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ for $r \neq 0$.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} K\right) \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} i (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} j (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial z} K (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} i (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (\cancel{2}x) + \left(-\frac{1}{\cancel{2}} j\right) (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (\cancel{2}y) + \left(-\frac{1}{\cancel{2}} K\right) (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (\cancel{2}z)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \, (-xi - yj - zK) \quad \therefore \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

Scanned by CamScanner

Chapter (3)

د. سعدي الشقيري

Solution of electrostatic problems

حل المسائل الكهروستاتيكيه .

* Poisson's equation

- we have the differention form of Gauss law

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{———} \quad (1)$$

E may be expressed as a minus the gradient of the potential U.

$$E = -\nabla U \quad \text{———} \quad (2)$$

combining eq^n (1), (2) we get

$$\nabla \cdot \nabla U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{———} \quad (3)$$

but $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ (Laplacian operator مؤثر لابلاس)

The eq^n (3) becomes

$$\boxed{\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{———} \quad (4) \quad (\text{poisson's equation})$$

- ومن الواضح ان اللابلاسيان ∇^2 هو عامل تفاضلي لامتجه خالص وان المعادله (4) هي معادله تفاضليه تدعى معادله بويزون ، والعامل ∇^2 يتضمن تفاضلاً لاكثر من متغير ولهذا تعد معادله بويزون معادله تفاضليه جزئيه يمكن حلها حالما تعرف الداله $\rho(x,y,z)$ وشروط الحدود المناسبه .

- لكي يصبح بوسعنا حل مسأله معينه علينا ان نكتب ∇^2 بدلالة الاحداثيات x, y, z ، r, θ, ϕ او ... الخ ومع ذلك اعتباطياً يقع الاختيار على النظام الذي ينسجم مع طبيعة التناظر في المسأله الكهروستاتيكيه التي نحن بصددها لغرض تبسيط الحل.

- ويمكن بسهوله ايجاد $\nabla^2 U$ باحداثيات مختلفه

١- وفق الاحداثيات المتعامده

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{———} \quad (5)$$

Scanned by CamScanner

٢- وفق الاحداثيات الكرويه

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \quad \cdots (6)$$

٣- وفق الاحداثيات الاسطوانيه

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{———} \quad (7)$$

* **Laplace's equation** معادلة لابلاس .

- في طائفه معينه من المسائل الكهروستاتيكيه التي تتضمن موصلات تكون الشحنه بأجمعها مستقره على سطح الموصلات او تكون بهيئة شحنات نقطيه مثبته وفي مثل هذه الحالات تكون $\rho = 0$ عند معظم النقاط في الفضاء. وبهذا نجد ان معادله بويزون تؤول الى صيغه ابسط عندما تتلاشى كثافة الشحنه . هذه الصيغه تعرف بأسم معادلة لابلاس .

- In certain class of electrostatic problems involving conductors, the charge is found either on the surface. ρ is Zero at most point in space. and when the charge density vaniches, the poisson's equation reduce to simple form., The eq^n (4) becomes , $\rho = 0$

$$\boxed{\therefore \nabla U = 0} \quad \text{———} \quad (8) \quad \text{(Laplace's equation)}$$

- The solution of Laplace equation
- Laplace's equation in one independent varible

- معادلة لابلاس بمتغير واحد فقط . P - الاحداثيات الكارتيزيه

اذا كانت U داله لمتغير واحد فقط ، عندئذٍ تؤول معادلة لابلاس الى معادله تفاضليه اعتياديه . لنأخذ الحاله التي تكون منها الداله U داله لاحداثي واحد هو x فأن حل معادله لابلاس سيكون

$$\nabla^2 U = 0$$

$$\because \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}}}_{\text{Zero}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}}_{\text{Zero}} = 0$$

$$\therefore \nabla^2 U = \frac{d^2 U}{dx^2} = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx}\right)=0$$

$$d\left(\frac{dU}{dx}\right)=0 \Rightarrow \int d\left(\frac{dU}{dx}\right)=\int 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx}=a$$

$$\Rightarrow \int dU=\int a\,dx \Rightarrow \boxed{U=ax+b}$$

هذه المعادله تعبرعن الحل العام ، حيث يتم اختيار الثابتين a ، b حسب شروط الحدود وهي تمثل الجهد بين لوحين موصليين مشحونين عموديين على محور x .

$$\boxed{\because \quad E=-\nabla U=-a}$$

ب / وفقاً للاحداثيات الكرويه / واذا كانت U داله لمتغير واحد مثل r اي

$$U=U(r)$$

وبما ان $\nabla^2 U$ بالاحداثيات الكرويه بشكل عام هي

$$\nabla^2 U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}.$$

وبما ان $U(r)$ فقط سيكون الحد الثاني والثالث صفراً

$$\therefore \nabla^2 U=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0 \Rightarrow d\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$$

$$\Rightarrow \int d\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=\int 0 \Rightarrow r^2\frac{dU}{dr}=A \Rightarrow \frac{dU}{dr}=\frac{A}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int dU=A\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow U=A\int r^{-2}dr \Rightarrow U=-Ar^{-1}+b$$

$$\boxed{\therefore \Rightarrow U(r)=-\frac{A}{r}+B}$$

الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الكرويه وبمتغير واحد ، حيث A ، B ثوابت

$$\because \quad E=-\nabla U$$

$$\boxed{\therefore \quad E=-\frac{A}{r^2}}.$$

$$E=-\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A}{r}+B\right)$$

$$E=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r}\right)-\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(B)}^{\,0}$$

$$E=-\frac{A}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1})=-r^{-2}$$
$$=-\frac{1}{r^2}$$

جـ - وفقاً للاحداثيات الاسطوانيه واذا كانت $U = U(r)$

فان $\nabla^2 U$ بالاحداثيات الاسطوانيه بشكل عام هي

$$\because \nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}}}_{zero} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}}_{zero} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int d\left(r\frac{dU}{dr}\right) = \int 0 \Rightarrow r\frac{dU}{dr} = A$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r} \Rightarrow dU = \frac{A}{r}dr$$

$$\Rightarrow \int dU = A\int\frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{U = A\ln r + B}$$

الحل العام لمعادلة لابلاس بالاحداثيات الاسطوانيه بمتغير واحد، حيث A ، B ثوابت

$$\because E = -\nabla U$$

$$\therefore \boxed{E = -\frac{A}{r}}$$

$$E = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}(A\ln r + B)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}(A\ln r) - \cancel{\frac{\partial}{\partial r}}(B)^{\,0}$$

$$= -\frac{A}{r}$$

مشتقة تام

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ln r) = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ln r^2) = \frac{2r}{r^2}$$

---

* اما بالنسبه لحلول معادله بويزون .

قد بينا سابقاً ان معادلة لابلاس ملائمه لحل المسائل الكهروستاتيكيه التي تمتاز بأن تكون الشحنه مستقره على سطوح الموصلات او متمركزه على شكل شحنات نقطيه او خطيه، وتصبح ايضاً معادلة لابلاس فيما لو ملئت المنطقه الكائنه بين الموصلات بواحد او اكثر من الاوساط العازله البسيطه. الآن دعنا نأخذ مسأله كهروستاتيكيه بحيث يكون جزء من الشحنه معطى بدلالة $\rho(x,y,z)$ والجزء الباقي من الشحنه (الشحنه المتبقيه) مستقراً على سطوح الموصلات. ان مسأله من هذا النوع تتطلب حلاً لمعادلة بويزون وكمثال على هذه الحاله نأخذ (ρ) دالة للاحداثي الكروي (r) فقط وندع الشحنه الكليه موزعه بشكل تناظر كروي، عند ذلك وبأسلوب آخر نقول

Ex/ Use poisson's equation to find the electric field inside volume sphere. which is charges where the volume charge density is constant and equals (ρ) ?

مثال/ استعمل معادله بويزون لايجاد شدة المجال داخل حجم كروي فيه شحنات علماً انه كثافة الشحنه الحجميه ثابته وتساوي (ρ)

Sol/

$$\because \quad \nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_o}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_o}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_o}$$

$$\int d\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_o}\int r^2 dr \,.$$

$$r^2\frac{dU}{dr} = -\frac{\rho r^3}{3\epsilon_o} + C \Rightarrow \frac{dU}{dr} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_o} + \frac{C}{r^2}$$

$$\int dU = -\frac{\rho}{3\epsilon_o}\int r\,dr + C\int\frac{dr}{r^2}$$

$$\left|\; \int\frac{dr}{r^2} = \int r^{-2}dr = \frac{r^{-1}}{-1} = -\frac{1}{r} = -\frac{c}{r} + B \,.\right.$$

$$\boxed{\therefore \quad U = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_o} - \frac{C}{r} + B}$$

$$\because \quad E = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{\rho r^2}{6\epsilon_o} - \frac{C}{r}\right)$$

$$= \frac{d}{dr}\left(\frac{\rho r^2}{6\epsilon_o}\right) + \frac{d}{dr}\left(\frac{C}{r}\right)$$

$$\left|\; \frac{d}{dr}(r^{-1}) = -r^{-2} = -\frac{1}{r^2}\right.$$

$$= \frac{\cancel{2}\rho r}{\underset{3}{\cancel{6}}\epsilon_o} - \frac{C}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_o} - \frac{C}{r^2}$$

$$\boxed{\therefore \quad E = \frac{\rho r}{3\epsilon_o} - \frac{C}{r^2}}$$

ترجمة المثال

Ex/ use poisson's equation to find the electric field inside volume sphere, which is charges where the volume charge density is constant and equal (ρ)

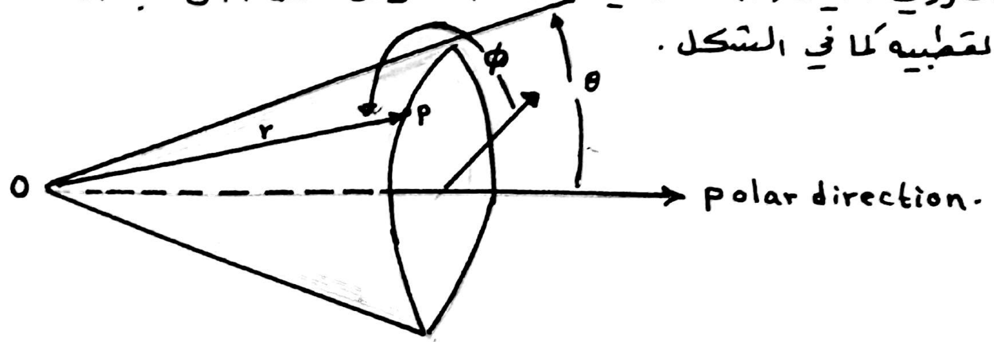
Scanned by CamScanner

* Solution to Laplace's equation in spherical coordinates

- حلول معادله لابلاس بالاحداثيات الكرويه - Zonal harmonics.

التوافقيات المنطقيه .

- نبدأ اولاً بمعادلة المسأله الكرويه ، وسنجد انه من الافضل ان تقتصر مناقشتنا على الحالات التي تكون فيها U غير معتمده على الزاويه السمتيه ϕ وعلى هذا الاساس تكون U داله لمتغيرين فقط اي $U(r, \theta)$ بالنسبه للحاله الكرويه اذ ان (r) تمثل قيمة نصف القطر من نقطة اصل مثبته (O) و θ هي الزاويه القطبيه كما في الشكل .



الشكل / موقع (P) بدلالة الاحداثيات الكرويه (r, θ, ϕ)

- لهذه الحاله تأخذ معادلة لابلاس الصيغه الآتيه .

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)=0 \quad ----(1)$$

- وسنعتمد في حل هذه المعادله التفاضليه الجزئيه على اسلوب معروف بأسم " فصل المتغيرات ". وبتعويض حل بهيئة $U(r, \theta) = Z(r)\, P(\theta)$ في المعادله (1) ينتج .

$$\frac{1}{r^2}P(\theta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{Z(r)}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)=0 \quad ----(2)$$

- لاحظ ان المشتقات الجزئيه قد استبدلت بمشتقات كليه لان كل من (Z, P) داله لمتغير واحد فقط

- بتقسيم المعادله (2) على $U(r,\theta) = Z(r)\,P(\theta)$ وضربها ب r^2 تؤول هذه المعادله الى الشكل الآتي .

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=-\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) \quad ------(3)$$

- الجهه اليسرى من المعادله (3) داله للمتغير r فقط والجهه اليمنى داله للمتغير (θ) والطريقه الوحيده التي تجعل الداله لـ (r) مساويه للداله لـ (θ) لجميع قيم (r, θ) هي ان تكون الدالتان مساويه لمقدار ثابت ، لذا سنفرض ان كل جهه من جهتي المعادله (3) تساوي K ، اذ ان K " ثابت الفصل "

- الطرف الأيسر من المعادله (3) يصبح

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right)=n(n+1)Z. \quad ----(4)$$

حيث $K = n(n+1)$

n = ترمز لأي عدد موجب صحيح

Scanned by CamScanner

- وبتأمل المعادله (4) يظهر ان هناك حلين مستقلين هما .

$$Z_n = r^n \quad \text{and} \quad Z_n = r^{-(n+1)}$$

- ويمكننا الحصول على حلول معادله لابلاس من

$$U_n(r,\theta) = Z_n(r)\, P_n(\theta)$$

- وهنا يجب الانتباه جيداً الى ضرورة جعل الدالتين Z , P مرادفتين لقيمه واحده لـ n وهذا هو شرط ملزم وذلك لأن طرفي المعادله (3) يساويان الثابت نفسهُ وهو $n(n+1)$.

- وهكذا استطعنا أن نحل معادلة لابلاس بالاحداثيات الكرويه وفقاً لما جاء في المناقشه في اعلاه ، وحصلنا على مجموعه من الحلول تعرف بأسم توافقيات منطقيه - Zonal harmonics . هي

$$\boxed{U_n = r^n P_n(\theta) \quad \text{or} \quad U_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta)} \text{------} (5)$$

- اما الطرف الايمن من المعادله (3) فيصبح .

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + KP = 0 \text{-------} (6)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + n(n+1)P = 0 \text{----} (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Let } x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta \Rightarrow d\theta = -\frac{dx}{\sin\theta} \\ &x^2 = \cos^2\theta \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 - x^2 . \end{aligned}\right] \text{--} (8)$$

نعوض من (8) في (7) نحصل

$$\cancel{\frac{1}{\sin\theta}}\left(-\cancel{\sin\theta}\right)\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta \frac{dP}{dx}\right) + n(n+1)P = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + n(n+1)P = 0 \text{--------} (9)$$

- اما حلول المعادله (9) فتعطى بالعلاقه

$$P_n(\theta) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \text{---------} (10)$$

- ان الحلول المقبوله لـ $P_n(\theta)$ تعد متعددة الحدود بالنسبه لـ $\cos\theta$ ، وتعرف عادةً بأسم متعدده حدود لاجندر Legendre polynomials

∴ المعادله (10) تصبح

when $n = 0$

$P_0(\theta) = 1$

$\frac{d^0}{dx^0}$ (no operator) يعني مؤثر لا يحسب

$2^0 = 1$

$0! = 1$

when $n = 1$

∴ المعادله (١٥) تصبح .

$$P_1(\theta) = \frac{1}{2^1\,1!}\;\frac{d}{dx}(x^2-1)^1 = x$$
$$= \cos\theta$$

when $n = 2$

∴ المعادله (١٥) تصبح

$$P_2(\theta) = \frac{1}{2^2\,2!}\;\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2$$

$$= \frac{1}{8}\;\frac{d}{dx}2(x^2-1)(2x)$$

$$= \frac{4}{8}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)x = \frac{1}{2}\left[(x^2-1)*1 + x(2x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2-1+2x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

∴ متعددات حدود لاجندر لقيم n التي تساوي 2 , 1 , 0 كالآتي

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$

اذاً ان $P_n(\theta)$ تعد واحده من متعددات الحدود المدرجه في الجدول و n تمثل عدداً صحيحاً موجباً او صفر , والتوافقيات المنطقيه تشكل مجموعه كامله من الدوال وهذا يعني انه يمكن ان تكون حلاً عاماً لمعادلة لابلاس .

when $n = 3$

$$P_3(\theta) = \frac{1}{2^3\,3!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3$$

$$= \frac{1}{8\times 6}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left[3(x^2-1)^2\cdot 2x\right]$$

$$= \frac{6}{48}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left[(x^2-1)^2\cdot x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^2\cdot 1 + 2x(x^2-1)\cdot 2x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^2 + 4x^2(x^2-1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[2(x^2-1)\cdot 2x + 4x^2\cdot 2x + (x^2-1)\cdot 8x\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[4x^3-4x+8x^3+8x^3-8x\right]$$

$$= \frac{1}{8}(20x^3-12x)$$

$$= \frac{4}{8}(5x^3-3x)$$

$$= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

Scanned by CamScanner

Q1 Two concentric spherical conductor's shell have radii r_a, r_b, this shell is charges and have potential u_a, u_b respectivily, when $r_b > r_a$, find the potential at the point outside the big shell $r > r_b$ and the potential at the point between the two shell $r_a < r < r_b$.

س قشرتان كرويتان موصلتان نصف قطريهما r_a ، r_b وضعتا بحيث ينطبق مركز الاولى على الثانية، ثم شحنتا الى ان اصبح جهداهما u_a ، u_b على الترتيب فاذا كانت $r_b > r_a$ جد الجهد عند النقاط الواقعة خارج القشرة الكبيرة $r > r_b$ وكذلك الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين

الحل / (١) لايجاد الجهد عند النقاط الواقعة بين القشرتين اي عندما

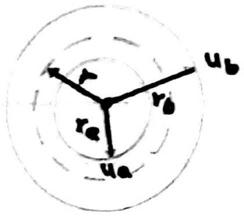
$$r_a < r < r_b$$

بما ان الكرتان موصلتان اذن ستكون المنطقة بينهما خالية من الشحنات اي $\rho = 0$ وهذا يعني

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ستتحول الى

$$\nabla^2 u = 0$$



وبما ان $u(r)$ فقط سيكون

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0$$

$$\int d\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = \int 0 \Rightarrow r^2\frac{du}{dr} = A \Rightarrow \int\frac{du}{dr} = \int\frac{A}{r^2}$$

$$\Rightarrow \int du = \int\frac{A}{r^2}\,dr \Rightarrow \boxed{u = -\frac{A}{r} + B} \quad \text{——— (1)}$$

وهذا هو الحل العام بالاحداثيات الكروية

- الآن نطبق الشروط الحدودية على هذه المعادلة لايجاد قيم A ، B

$r = r_a$, $u = u_a$

$r = r_b$, $u = u_b$.

نعوض هذه الشروط في المعادلة (١)

$$u_a = -\frac{A}{r_a} + \cancel{B}$$

$$u_b = \mp\frac{A}{r_b} \mp \cancel{B}$$

$$u_a - u_b = -A\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = -A\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\boxed{\therefore -A = \left(\frac{u_a - u_b}{r_b - r_a}\right) r_a r_b} \text{ ———— } (2)$$

لايجاد B نعوض معادله (2) في u_a سيكون

$$u_a = \frac{(u_a - u_b)\cancel{r_a} r_b}{(r_b - r_a)\cancel{r_a}} + B \Rightarrow \boxed{B = u_a - \frac{(u_a - u_b) r_b}{(r_b - r_a)}} \text{ — } (3)$$

نعوض (2) ، (3) في (1) نحصل .

$$u = \frac{(u_a - u_b) r_a r_b}{(r_b - r_a) r} + u_a - \frac{(u_a - u_b) r_b}{r_b - r_a}$$

$$u = \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + u_a(r_b - r_a) - (u_a - u_b) r_b}{r_b - r_a}$$

$$u = \frac{(u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r} + \cancel{u_a r_b} - u_a r_a - \cancel{u_a r_b} + u_b r_b}{r_b - r_a}$$

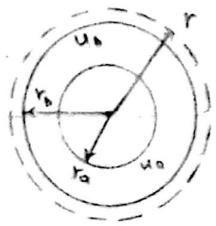
$$\boxed{\therefore u = \frac{r_b u_b - r_a u_a + (u_a - u_b)\frac{r_a r_b}{r}}{r_b - r_a}}$$

② عندما $r > r_b$

بما ان r خارج الكره r_b فاحتمال ان تكون النقطه في المالانهايه

فالجهد = صفر $r = \infty \quad , \quad u = \text{Zero} \quad (*)$

$$\boxed{\because u = -\frac{A}{r} + B} \text{ ———— } (1)$$



نطبق الشرط الحدودي الاول $(*)$

Scanned by CamScanner

$$\therefore 0 = -\frac{A}{\infty} + B \Rightarrow \boxed{B = 0} \quad \text{(2)} \qquad \frac{A}{\infty} = 0$$

ولايجاد قيمة (A) نعوض معادلة (2) في (1) بعد التعويض عن قيمة

$r = r_b \quad , \quad u = u_b$

$$u_b = -\frac{A}{r_b} + 0 \Rightarrow \boxed{-A = r_b u_b} \quad \text{(3)}$$

نعوض (2) ، (3) في (1) يكون الحل

$$\boxed{u = \frac{r_b u_b}{r}}$$

---

92 Two long concentric sylindrical shell have radii r_a , r_b , this shell is charges and have potential u_a , u_b . find the potential between the two shell.

س قشرتان اسطوانيتان طويلتان متحدتا المحور نصف قطريهما r_a / r_b شحنتا الى أن اصبح جهداهما u_a / u_b على الترتيب ، جد الجهد عند النقاط الكائنة بين القشرتين .

الحل/ وفقاً للاحداثيات الاسطوانيه ستكون

$u = u(r)$

$\nabla^2 u = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int d\left(r\frac{du}{dr}\right) = \int 0 \Rightarrow r\frac{du}{dr} = A \Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow du = \frac{A}{r}dr \Rightarrow \int du = A\int \frac{dr}{r} \Rightarrow u = A\ln r + B$$

الشروط الحدوديه هي

$r = r_a \quad / \quad u = u_a$

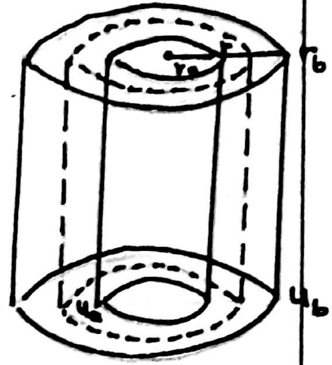
$r = r_b \quad / \quad u = u_b$.

نطبق هذه الحدود على الحل العام لمعادلة لابلاس وهي

$$\boxed{u = A\ln r + B} \quad \text{(1)}$$

Scanned by CamScanner

بعد تطبيق الشروط الحدوديه في معادله (1) سيكون



$$u_a = A \ln r_a + B$$

$$\mp u_b = \mp A \ln r_b \mp B$$

بالطرح

$$u_a - u_b = A(\ln r_a - \ln r_b) = A \ln \frac{r_a}{r_b}$$

$$\boxed{\therefore\ A = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}}} \quad \text{———} \ (2)$$

ولايجاد B نعوض (2) في معادله u_a سيكون

$$\boxed{B = u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a} \quad \text{———} \ (3)$$

ونعوض (2) ، (3) في (1) سيكون

$$u = \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r + u_a - \frac{u_a - u_b}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \ln r_a .$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\ln r + u_a \ln \frac{r_a}{r_b} - (u_a - u_b)\ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\ln r + u_a(\ln r_a - \ln r_b) - u_a \ln r_a + u_b \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$= \frac{(u_a - u_b)\ln r + \cancel{u_a \ln r_a} - u_a \ln r_b - u_a \ln r_a + u_b \ln r_a}{\ln \frac{r_a}{r_b}}$$

$$\boxed{\therefore\ u = \frac{u_b \ln r_a - u_a \ln r_b + (u_a - u_b)\ln r}{\ln \frac{r_a}{r_b}}}$$

Scanned by CamScanner

93 prove that point charge potential satisfies Laplace equation.

الحل / ان جهد شحنه نقطيه هو

$$u = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

هذه المعادله يجب ان تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\because \nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)$$ للاحداثيات الكرويه

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow \frac{d}{dr}(r^{-1}) \Rightarrow -r^{-2} = -\frac{1}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\cancel{r^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right) = 0$$

$$\therefore \nabla^2 u = 0$$

∴ الجهد لشحنه نقطيه يحقق معادلة لابلاس .

Ex/ A potential distribution is given by $V = 7y^2 + 12x$ (v) what is the expression for E ? what is the vector value (magnitude and direction) at point (0,0), (5,0), (0,3) and (5,3)

Sol/ $V = 7y^2 + 12x$

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(7y^2 + 12x)$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(7y^2+12x)i + \frac{\partial}{\partial y}(7y^2+12x)j + \frac{\partial}{\partial z}(7y^2+12x)k\right]$$

$$E = -12i - 14yj$$

(1) At point (0,0) ⇒ $E = -12i$
(2) At point (0,3) ⇒ $E = -12i - 42j$
(3) At point (5,0) ⇒ $E = -12i$
(4) At point (5,3) ⇒ $E = -12i - 42j$.

Scanned by CamScanner

chapter « 4 »

The electrostatic field in dielectric media.

المجال الكهروستاتيكي في الاوساط العازله.

مقدمه :

الى حد الآن اهملنا المسائل التي تتضمن اوساطاً عازله ، واكتفينا بمعالجة الحالات التي يكون فيها المجال الكهربائي ناتجاً بصوره تامه عن الشحنات الطليقه فقط (اما ان تكون بشكل توزيع شحني معين او أن تكون على شكل شحنه طليقه على سطح الموصلات) . والآن سنقوم بدراسة تلك الحالات الاكثر شيوعاً .

* An idel dielectric material is on which has no free charge

* الماده العازله المثاليه : هي تلك الماده التي لا تمتلك شحنات طليقه

* The electric field causes يسلط a force on each charge particle

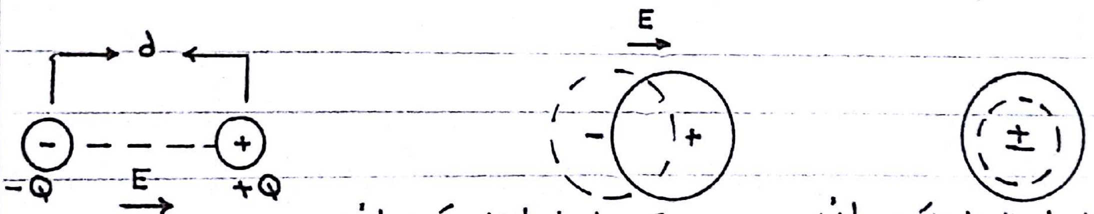
* جزيئات الماده العازله تتأثر بوجود المجال الكهربائي

* المجال يسلط قوه على كل جسيم مشحون

* الجسيمات الموجبه تندفع باتجاه المجال الكهربائي والجسيمات السالبه تندفع بالاتجاه المعاكس ، مما يؤدي الى ازاحة الجزئيين الموجب والسالب للجزيئه عن موضع الاتزان باتجاهين متعاكسين

* إن مقدار هذه الازاحه محدد (بأجزاء كسريه صغيره من قطر الجزيئه) بقوى مرجعه قويه تنشأ عن تغير شكل الشحنه داخل الجزيئه .

* ويمكن ببساطه رؤية التأثير الأجمالي الناتج حسب وجهة النظر العينيه وكأنه ازاحة كل الشحنه الموجبه للعازل عن شحنته السالبه ، وعند ذلك يقال عن العازل بأنه أصبح مستقطباً .



بعد تسليط المجال الكهربائي — قبل تسليط المجال الكهربائي

* According to our simple picture , the otom may then be represented by the equivalent point-charge dipole (dipole moment = Q d)

* يمكن تمثيل هذا الأنتقال بعزم ثنائي قطب ويرمز له بالرمز « p »

$$p = Q d \qquad (1)$$

* polarization (P) : The effect of the atomic dipoles can be discribed by the polarization (P) الأستقطاب

or dipole moment per unit volume. Thus

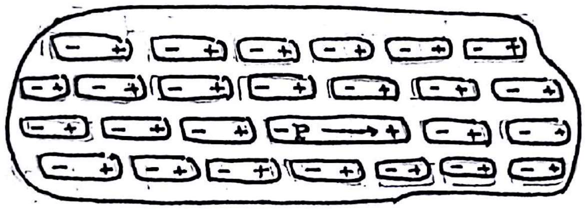
$$P = \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad \text{——— (2)}$$

الاستقطاب :- عزم ثنائي القطب لوحدة الحجم

وبتعبير أدق يجب تعريف (P) على انها غاية هذه الكميه عندما يصبح حجم العنصر صغيراً جداً حسب وجهة النظر العينيه وعلى هذا الأساس تصبح (P) داله نقطيه $P(x,y,z)$. وهذه الكميه تدعى الاستقطاب الكهربائي أو باختصار "الاستقطاب للوسط المادي" ووحدتها تنتج من قسمة وحدة الشحنه على وحدة المساحه اي كولوم لكل متر مربع ($coul/m^2$) وفق النظام المتري.

ومن الواضح ان $P(x,y,z)$ هي كميه متجه ذات إتجاه ينطبق على اتجاه Δp للعنصر الحجمي، وهذا بدوره يكون بنفس إتجاه ازاحة الشحنه الموجبه عن الشحنه السالبه كما في الشكل

$$P = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{N p}{\Delta V} \quad \text{——— (3)}$$



قطعه من ماده عازله مستقطبه كل عنصر حجمي بمثابة ثنائي قطب P.

---

* Electric susceptibility and dielectric constant

التأثريه الكهربائيه وثابت العزل

- إن استقطاب الوسط العازل يحدث نتيجة لاستجابة الوسط للمجال الكهربائي فيه

- اما درجة الاستقطاب فتعتمد ليس على المجال الكهربائي فحسب بل على خواص جزيئات مادة الوسط ايضاً.

- لمعظم المواد تتلاشى (P) اذا ما تلاشت (E) اي

$$P \propto E \Rightarrow P = \chi E \quad \text{——— (1)}$$

where (χ) is the electric susceptibility تدعى الكميه اللاتجه χ التأثريه الكهربائيه او قابلية التكهرب للماده.

but $D = \epsilon_0 E + P$ ——— (2)

حيث D متجه عيني جديد واسمه الازاحه الكهربائيه حيث يتضح ان وحدته هي وحدة الاستقطاب نفسها اي وحدة الشحنه على وحدة المساحه.

- In the dielectric we can also write

$$D = \epsilon E \quad \text{——— (3)}$$

where ϵ is the permittivity of the dielectric material in farads per meter.

$\epsilon \leftarrow$ سماحيه الماده العازله.

sub (1), (3) in (2) we get

$$\epsilon E = \epsilon_o E + \chi E$$

$$\epsilon = \epsilon_o + \chi \longrightarrow (4)$$

ان السلوك الكهربائي للماده يحدد كلياً اما بالسماحيه ϵ اوبقابلية التكهرب χ، وعليه من الأفضل ان نتعامل مع كميه لاوحده لها هي معامل العزل او ثابت العزل ورمزها K ويعرف ثابت العزل وفق العلاقه

$$\epsilon = K \epsilon_o \Rightarrow K = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} \quad \text{——— (5)}$$

sub (4) in (5) we get

$$\Rightarrow K = \frac{\epsilon_o + \chi}{\epsilon_o} \Rightarrow K = \frac{\epsilon_o}{\epsilon_o} + \frac{\chi}{\epsilon_o}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_o}} \quad \text{——— (6)}$$

بالامكان من العلاقات السابقه اشتقاق علاقات اخرى وكالآتي

we have

$$D = \epsilon_o E + P \quad \text{——— (1)}$$

and $D = \epsilon E$ ——— (2) $\Rightarrow$ Sub (2) in (1) we get

$$\epsilon E = \epsilon_o E + P \Rightarrow \boxed{\epsilon = \epsilon_o + \frac{P}{E}} \text{ or } \frac{P}{E} = \epsilon - \epsilon_o \text{ — (3)}$$

The ratio $\frac{P}{E}$ is also sometimes written

$$P = \chi \epsilon_o E \Rightarrow \frac{P}{E} = \chi \epsilon_o \quad \text{——— (4)}$$

لبعض العوازل المتجانسه او الخطيه

بمساواة المعادله (3 ، 4) نحصل

$$\epsilon - \epsilon_o = \chi \epsilon_o \Rightarrow \epsilon = \chi \epsilon_o + \epsilon_o$$

$$\Rightarrow \epsilon = \epsilon_o (\chi + 1) \Rightarrow \epsilon / \epsilon_o = K \Rightarrow \boxed{\therefore K = \chi + 1 \text{ or } \chi = K - 1}$$

Scanned by CamScanner

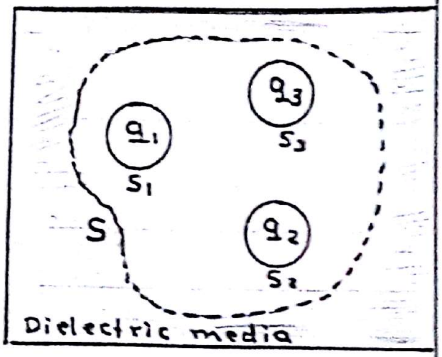
Gauss' law in a dielectric . The electric displacement

قانون كاوس لوسط عازل . الازاحه الكهربائيه

- عند تطبيق قانون كاوس على منطقه تحتوي على شحنات طليقه مغروسه في عازل ، يجب علينا ان نشمل جميع الشحنات الكائنه داخل السطح المغلق (الكاوسي) المقيده منها والطليقه على حد سواء.

إن الخط المتقطع (S) المبين بالشكل يمثل سطح كاوس وهو سطح مغلق كائن داخل وسط عازل . وهناك كميه معينه من الشحنه الطليقه (Q) داخل الحجم المحدد بالسطح (S) . ونفرض إن هذه الشحنه الطليقه موزعه على ثلاث اجسام موصله بكميات قدرها q_1 ، q_2 ، q_3 وبتطبيق قانون كاوس على هذه الحاله ينتج .

$$\oint_S E \cdot n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q + Q_p\right) \quad (1)$$



حيث

Q ⇦ تشير الى مجموع الشحنات الطليقه

Q_p ⇦ تشير الى شحنة الاستقطاب

شكل يبين تشييد سطح كاوس (S) في وسط عازل .

$$\Rightarrow Q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\Rightarrow Q_p = \sigma_p + \rho_p$$

$$\Rightarrow \sigma_p = p \cdot n$$

$$\Rightarrow \rho_p = -\operatorname{div} p$$

إن الكميتين $p \cdot n$ ، $-\operatorname{div} p$ اللتان تظهران هي دالتان لا اتجاهيتان مستمدتان من متجه الاستقطاب وبما ان هاتين الكميتين تمتلكان ابعاد الشحنه لوحدة المساحه والشحنه لوحدة الحجم على الترتيب لذا تم كتابتهما بالصوره المكتوبه في اعلاه .

اذ يطلق على الرمزين σ_p ، ρ_p اسم كثافه شحنة الاستقطاب (او الشحنه المقيده) السطحيه والحجميه على الترتيب ، ويستخدم اسم الشحنه المقيده للتعبير عن حقيقة إن هذه الشحنه ليست حرة الحركه ولا يمكن انتزاعها من مادة العازل ، والكثافه السطحيه للشحنه المقيده تعطي بدلالة مركبة الاستقطاب العموديه على السطح اما الكثافه الحجميه للشحنه المقيده فتعد بمثابة قياس لعدم انتظام الاستقطاب داخل الماده العازله .

- ان شحنة الاستقطاب الكليه لجسم عازل وقدرها

$$Q_p = \oint_{S_1+S_2+S_3} p \cdot n\,da + \int_V (-\operatorname{div} p)\,dV \quad (2)$$

ρ_p - يمثل الشحنه الكليه السالبه الناتجه عن الاستقطاب

Scanned by CamScanner

وهنا ترمز V الى حجم ذلك الجزء من العازل المحاط بالسطح المغلق S وعند تحويل التكامل الحجمي في المعادله (2) الى تكامل سطحي باستخدام نظرية التباعد ، يجب ان نستمل جميع السطوح المحيطه بالحجم V ونعني بها S و S_1 و S_2 و S_3 وكما الآتي

$$Q_p = \oint_{S_1+S_2+S_3} P\cdot n\,da - \oint_{S_1+S_2+S_3} P\cdot n\,da - \oint_{S} P\cdot n\,da$$

$$\therefore\ Q_p = -\oint_{S} P\cdot n\,da \quad \text{———} \quad (3)$$

بدمج معادله (1) و (3) نحصل

$$\oint_{S} E\cdot n\,da = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q - \oint_{S} P\cdot n\,da\right)$$

$$\oint_{S} \epsilon_0 E\cdot n\,da + \oint_{S} P\cdot n\,da = Q$$

$$\oint_{S} (\epsilon_0 E + P)\cdot n\,da = Q \quad \text{———} \quad (4)$$

تنص المعادله (4) على ان فيض المتجه $(\epsilon_0 E + P)$ خلال سطح مغلق يساوي الشحنه الطليقه الكليه التي يحتضنها السطح .

but $\epsilon_0 E + P = D$ ——— (5)

sub (5) in (4) we get $\oint_{S} D\cdot n\,da = Q$ ——— (6)

And this relation called G.L from the electric displacement
وتسمى هذه العلاقه قانون كاوس للازاحه الكهربائيه
وعند تطبيق هذه المعادله على منطقه صغيره تكون فيها الشحنه الطليقه التي يحتضنها السطح موزعه بكثافه حجميه ρ. يؤول قانون كاوس الى الصيغه الآتيه

$$\oint_{S} D\cdot n\,da = \int_{V} \rho\, dV \quad \text{———} \quad (7)$$

يتبع

- بتطبيق نظرية التباعد على السطح في المعادله السابقه نحصل

$$\oint_s D \cdot n\, da = \int_V \operatorname{div} D\, dV \qquad (8)$$

بمساواة المعادله (7) ،(8) نحصل

$$\int_V \operatorname{div} D\, dV = \int \rho\, dV$$

$$\therefore \quad \boxed{\operatorname{div} D = \rho} \qquad (9)$$

This result called the differential form Gaus's law in dielectric media.

Scanned by CamScanner

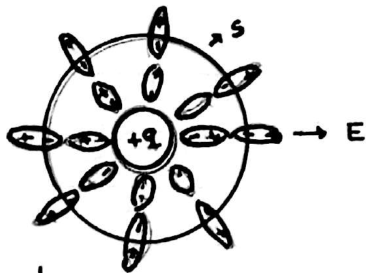
* point charge in a dielectric fluid.

شحنة نقطية في مائع عازل.

- تعد مسألة الشحنة النقطية المطمورة في عازل متجانس متساوي الاتجاه احدى أبسط المسائل التي تتضمن عازلاً ، ويفترض ان يكون الوسط العازل خطياً ومميزاً بثابت عزل قدره (K).

- اذا كانت الشحنة النقطية (q) موضوعة في الفراغ لأصبح المجال الكهربائي الناشئ عنها اشعاعياً تماماً . وبوجود الوسط العازل لاتتغير الطبيعة لشعاعية للمجال وذلك لان الكميات المتجه الثلاث (E ، D ، P) توازي إحداها الأخرى في هذا الوسط . كما ان طبيعة التناظر في هذه المسأله توحي الى أن قيم هذه الكميات تعتمد على البعد عن الشحنة النقطية فقط وليس على احداثي زاوي

- لنستخدم قانون كاوس على سطح كروي نصف قطره (r) ومركزه ينطبق على الشحنة النقطية (q) التي يفترض أن تكون واقعة عند نقطة الاصل للسهوله. لذا ينتج لدينا .



رسم تخطيطي يبين اتجاهات الجزيئات المستقطبة في وسط عازل يحيط بالشحنة النقطية (q)

$$\oint D \cdot n\,da = q \Rightarrow D \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{or}$$

$$\Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r} \quad \text{——— (1)}$$

وعند ذلك يصبح من السهل حساب المجال الكهربائي والاستقطاب وكما يلي

but $D = \epsilon E \Rightarrow \epsilon = K\epsilon_0 \Rightarrow D = K\epsilon_0 E$ ——— (2)

sub (2) in (1) we get

$$K\epsilon_0 E = \frac{q}{4\pi r^3}\cdot\vec{r} \Rightarrow \boxed{\therefore\ E = \frac{q}{4\pi K\epsilon_0 r^3}\cdot\vec{r}} \quad \text{——— (3)}$$

To find polarization

Scanned by CamScanner

we have

$$D = \epsilon_0 E + P \Rightarrow D = \epsilon E \Rightarrow \epsilon = K\epsilon_0 \Rightarrow D = K\epsilon_0 E$$

$$\therefore K\epsilon_0 E - \epsilon_0 E = P \Rightarrow \boxed{P = \epsilon_0 E(K-1)} \quad \text{—— (4)}$$

sub (3) in (4) we get

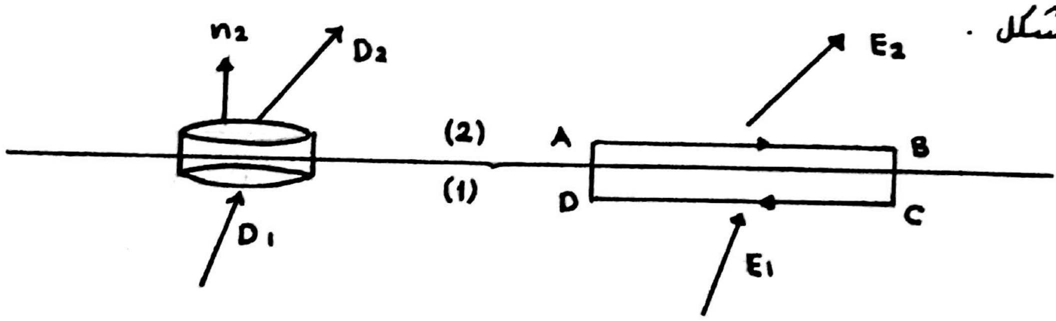
$$P = \cancel{\epsilon_0}(K-1) \cdot \frac{q}{4\pi K \cancel{\epsilon_0} r^3} \cdot \vec{r} \Rightarrow \boxed{P = \frac{(K-1) \cdot q}{4\pi K r^3} \cdot \vec{r}} \quad \text{— (5)}$$

* Boundary condition on the field vectors

تطبيق شروط الحدود على متجهات المجال

- علينا التعرف على المتجهين E ، D عندما يجتازان مستوياً فاصلاً بين وسطين وقد يكون الوسطان
- من مادتين عازلتين مختلفتين في خواصهما.
- او من ماده عازله واخرى موصله
- كما يمكن معاملة الفراغ على انه عازل ذو سماحيه قدرها ϵ_0 .

- لنأخذ وسطين مختلفين على تماس احدهما بالآخر ومؤشرين بالرقمين (1 و 2) كما في الشكل .



- لنأخذ سطحاً اسطوانياً (S) على شكل علبة اقراص صغيره بحيث يقطع السطح الفاصل ويحتضن منه مساحه قيمتها Δs وسنفرض ان ارتفاع السطح صغير الى حد يمكن اهماله. وسنفرض ان السطح الفاصل بين العازلين يحمل شحنه طليقه ذات كثافه سطحيه قدرها (σ_s) وعند تطبيق قانون كاوس على السطح (S) نحصل

$$D_2 \cdot n_2 \Delta s + D_1(-n_1 \Delta s) = \sigma_s \Delta s ,$$

$$(D_2 - D_1)\, n = \sigma_s \quad \text{—— (1)} \Rightarrow n_2 = n_1 = n .$$

وبهذا نجد ان الانقطاع في المركبه العموديه للازاحه (D) يعطى بدلاله الكثافه

$$D_2 n - D_1 n = \sigma_s \quad \dots \quad (1)$$

السطحيه للشحنه الطليقه على السطح الفاصل بين الوسطين ، وبتعبير آخر « ان المركبه العموديه للازاحه D تكون متصله فيما اذا لم تكن هناك شحنه طليقه على السطح الفاصل بين الوسطين »

$-1f\sigma_s = 0$

∴ العلاقه (1) تصبح

$$D_{2n} = D_{1n} \quad \text{——— (2)}$$

- والآن لنأخذ التكامل الخطي $E \cdot dl$ حول المسار المغلق ABCD ولنفرض انه يتلاشى ولنفرض ان طول كل من جزئي المسار AB ، CD يساوي Δl وان طول الجزئين BC ، AD مهملاً . لذا ينتج لدينا

$$\oint E \cdot dl = E_2 \cdot \Delta l + E_1 \cdot (-\Delta l) = 0$$

$$\Rightarrow E_2 \cdot \Delta l - E_1 \cdot \Delta l = 0 \Rightarrow E_2 \cdot \Delta l = E_1 \Delta l$$

$$\therefore E_{2t} = E_{1t} \quad \text{——— (3)}$$

- وهذا يعني ان المركبه المماسه للمجال الكهربائي تكون متصله عبر السطح الفاصل
- لقد حصلنا على النتائج في اعلاه لوسطين بدون تحديد ، ومع ذلك فأنه لجدير بالذكر ان نستنتج المعادلات المعبره عن حاله خاصه يكون منها احد الوسطين موصلاً .
- فأذا كان الوسط (1) موصلاً لأصبح $E_1 = 0$ وهذا يعني أن الاستقطاب يجب ان يكون صفراً هو الآخر . كان ان الازاحه D_1 تتلاشى في هذا الوسط طبقاً للمعادله $(D = \epsilon_0 E + P)$ وبهذا تأخذ المعادلتان (1) ، (3) الصيغتين

$$D_{2n} = \sigma_s \quad \text{——— (4)}$$

$$E_{2t} = 0 \quad \text{——— (5)}$$

- المعادلتان (4 ، 5) تعبران عن الازاحه والمجال الكهربائي داخل العازل في المنطقه القريبه جداً من السطح الفاصل .

* Boundary – value problems involving dielectrics

- مسائل القيم الحدوديه المتضمنه عوازلاً .

ان المعادله الاساسيه التي تم اشتقاقها في هذا الفصل هي

$$\nabla \cdot D = \rho \quad \text{——— (1)}$$

إذ ترمز ρ لكثافه الشحنه الطليقه . لكن العوازل التي تهمنا هي من النوع الذي يمتاز بكونه خطياً و متجانساً و ذات اتجاه متساوٍ لذا

$$D = \epsilon E \quad \text{——— (2)}$$

Scanned by CamScanner

ϵ هي ثابت مميز للمادة العازلة يدعى سماحية المادة ومن ذلك ينتج ان
Sub (2) in (1) we get

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad \text{———— (3)}$$

لكن متجه المجال الكهروستاتيكي E يرتبط بالجهد اللامتجه حسب العلاقة

$$E = -\nabla U \quad \text{———— (4)}$$

sub (4) in (3) we get

$$\nabla \cdot \nabla U = -\frac{1}{\epsilon} \rho \Rightarrow$$ but $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ (Laplacian operator)

$$\boxed{\therefore \nabla^2 U = -\frac{1}{\epsilon} \rho} \quad \text{———— (5)}$$

- وبهذا نجد ان الجهد في العازل يحقق معادلة بويزون والفرق الوحيد بين المعادلة (5) والمعادلة المماثلة للجهد في حالة الفراغ هو احلال ϵ بدلاً من ϵ_0 .
- وفي معظم الحالات التي تهمنا لايحتوي العازل على شحنة طليقة موزعة خلال الحجم الذي يشغله، اي ان $\rho = 0$ داخل مادة العازل. والشحنة الطليقة يمكن ان توجد على سطوح الموصلات او أن تتركز على هيئة شحنات نقطية قد تغمس في العازل. وتحت هذه الظروف يحقق الجهد معادلة لابلاس خلال جسم العازل اي

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{———— (6)}$$

Scanned by CamScanner

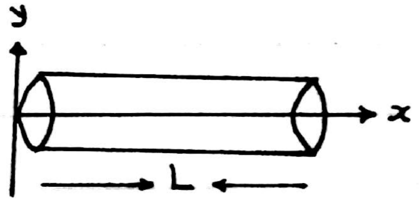
د. سعدي الشقيري

تمارين

Ex1 A thin dielectric rod of cross section (A) extends at along the x-axis from $(x=0)$ to $(x=L)$. the polarization of the rod is along its length and is given by $(P_x = ax^2+b)$ find the volume density of polarization charge and the surface polarization charge on each end. show explicity بالتفصيل that the total polarization charge vanishes in this case.

قضيب رقيق عازل مساحة مقطعه (A) يمتد على الاحداثي (x) بين النقطتين $x=0$ و $x=L$ واتجاه الاستقطاب في القضيب مع محور x وقيمته معطاة بالمعادلة $(P_x = ax^2+b)$. جد الكثافه الحجميه لشحنة الاستقطاب والشحنه السطحيه للاستقطاب على نهايتي القضيب، وبين بالتفصيل ان الشحنه الكليه المقيده تتلاشى في هذه الحاله.

sol



$$P_x = ax^2+b$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} P$$

$$\rho_p = -\operatorname{div}(ax^2+b)$$

$$\rho_p = -2ax$$ كثافة شحنة الاستقطاب الحجميه

or $\sigma_p = P\cdot n$

at $x=0 \Rightarrow \sigma_{p_1} = (ax^2+b) \Rightarrow \sigma_p = -b$ تم اخذ الاشاره السالبه لان كثافة الشحنه السطحيه المقيده تعطى بدلالة مركبة الاستقطاب العموديه على السطح.

at $x=L \Rightarrow \sigma_{p_2} = (ax^2+b) \Rightarrow \sigma_{p_2} = aL^2+b.$

$$\therefore Q_p = \int_V \rho_p \, dV + \int^{L} \sigma_p \cdot n \, da = \int (-2ax)A\,dx + \int (-b)A + (aL^2+b)A$$

$$= -\cancel{2}aA\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right] - \cancel{bA} + aL^2A + \cancel{bA} \quad , (x=L)$$

$$= \text{zero}$$

Scanned by CamScanner

Ex 2 / Two dielectric media with dielectric constant (K_1) and (K_2) are seperated by a plan interface. there is no external charge on the interface. find a relationship between the angle θ_1 and θ_2.

وسطان عازلان يفصلهما سطح مستوٍ لايحتوي على شحنه طليقه ، فأذا علمت ان ثابت عزل الوسط الاول K_1 والثاني K_2 . جد علاقه بين الزاويتين θ_1 ، θ_2 ، وهما الزاويتان المحصورتان بين العمود المقام على السطح الفاصل وخط كيفي للازاحه في هذين الوسطين على الترتيب

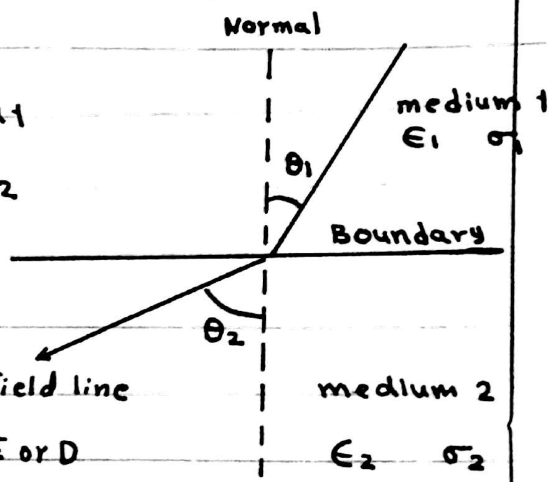
Sol / Let

D_1 = magnitude of D in medium 1

D_2 = magnitude of D in medium 2

E_1 = magnetude of in me-1

E_2 = magnetude of E in me-2



Boundary between two dielectric media . showing change in direction field line .

According to the boundary relations

1 - $D_{n1} = D_{n2}$ and $E_{t1} = E_{t2}$

2 - $D_{n1} = D_1 \cos\theta_1$ and $D_{n2} = D_2 \cos\theta_2$

3 - $E_{t1} = E_1 \sin\theta_1$ and $E_{t2} = E_2 \sin\theta_2$

substituting (2, 3) into (1) and dividing the resulting equations yields .

$$D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 \quad ---(4)$$

$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2 \quad ---(5)$$

dividing (5) in (4) we get

$$\frac{E_1 \sin\theta_1}{D_1 \cos\theta_1} = \frac{E_2 \sin\theta_2}{D_2 \cos\theta_2} \quad , \text{but} \quad D_2 = K_2 \epsilon_0 E_2 \quad D_1 = K_1 \epsilon_0 E_1$$

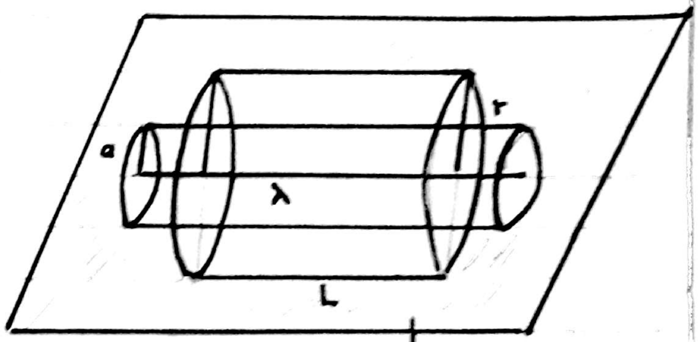
$$\frac{\cancel{E_1} \tan\theta_1}{K_1 \cancel{\epsilon_0} \cancel{E_1}} = \frac{\cancel{E_2} \tan\theta_2}{K_2 \cancel{\epsilon_0} \cancel{E_2}} = \frac{\tan\theta_1}{K_1} = \frac{\tan\theta_2}{K_2} \Rightarrow \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{K_1}{K_2}$$

د. سعدي التقيري

Suppose, for example, that medium (1) is air ($K_1 = 1$). while medium (2) is a slab of sulfur شريحة من الكبريت ($K_2 = 4$). then when $\theta_1 = 30^\circ$, the angle θ_2 in medium (2) is 66.6°.

Ex3/ Along cylindrical conductor of radius (a). bearing charge (λ) per unit length is immeresed غمرت in a dielectric medium of constant permitivity (ϵ). Find the electric field at a distance ($r > a$) from the axis of cylinder. موصل اسطواني طويل نصف قطره (a) ويحمل شحنة قيمتها (λ) لوحدة الطول، غمر في وسط عازل ذي سماحية ثابتة (ϵ) جد المجال الكهربائي عند البعد ($r > a$) عن محور الأسطوانة

Sol/ From G_L we have



$$\int D \cdot n da = Q$$

$nda = 2\pi r L$ (المساحة السطحية للاسطوانة)

$Q = \lambda L$

$$\therefore \; D \cdot 2\pi r L = \lambda L \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\pi r} \Rightarrow \text{but } D = \epsilon E$$

$$\therefore \Rightarrow \epsilon E = \frac{\lambda}{2\pi r} \Rightarrow \therefore \; E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon}.$$

Scanned by CamScanner